Méthode d'étude de la probabilité d'apparition d'angles remarquables dans un complexe mégalithique

Introduction

Situation initiale :
Suite au relevé des positions géographiques d'un certain nombre de mégalithes, nous avons mesuré tous les angles formés par les doublets de mégalithes avec l'axe nord-sud. Parmi les angles mesurés, nous avons remarqué que plusieurs correspondent à des angles dits « remarquables » (nous reviendrons sur la définition du terme plus tard).

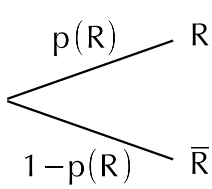
Problématique :
Devant ce constat, nous souhaiterions savoir si le nombre d'angles remarquables observés est potentiellement du au hasard. Autrement dit, nous souhaiterions savoir si un nombre équivalent de mégalithes disposés de manière totalement aléatoire présenterait autant d'angles remarquables ou non. Si ça n'est pas le cas, nous pourrions en déduire que la disposition des mégalithes étudiés n'est pas aléatoire mais s'inscrit dans une logique de construction à grande échelle.

But du document :
Ce document va chercher à résoudre mathématiquement la problématique pour un cas quelconque et à démontrer puis établir des formules applicables à tous les cas particuliers que l'on souhaitera étudier. Il servira donc de référence à d'autres documents, leur permettant de passer plus rapidement sur la partie théorique, sans avoir à la redémontrer systématiquement.

Etude la problématique

Chacune des mesures d'angle peut-être assimilée à une épreuve de Bernoulli, c'est à dire à une épreuve à seulement deux issues :
- sucés de l'épreuve (l'angle mesuré est remarquable, qu'on peut appeler « événement R ») ;
- échec de l'épreuve (l'angle mesuré n'est pas remarquable, qu'on appelle alors $\overline{R}$).

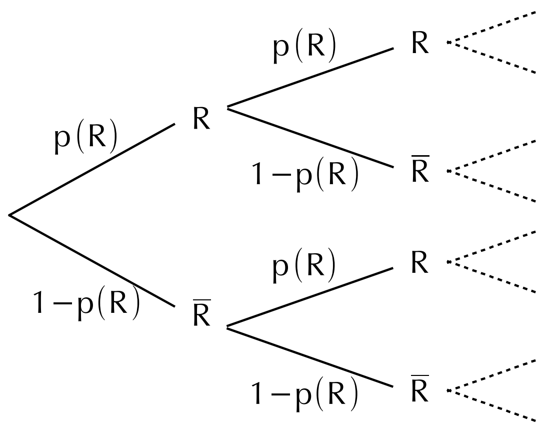
Cette situation est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



Toutes ses mesures sont indépendantes, car le résultat d'une mesure donnée n'est pas affecté par les résultats des mesures qui l'ont précédée. Autrement dit, mesurer un angle qui s'avère remarquable ne change en rien la probabilité que celui qu'on mesurera ensuite le soit aussi. Comme quand on joue à pile ou face, ça n'est pas parce qu'on fait pile une fois qu'on aura moins de chance de faire pile la fois d'après, la probabilité restera ½.

On en conclut que notre série de mesures peut être apparentée à un schéma de Bernoulli, c'est-à-dire à la répétition d'un certain nombre (noté « n ») d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Cette situation est représentée par un arbre pondéré dont on donne le début ci-contre.



Etc...

L'arbre pondéré entier aurait n niveaux : un pour chaque mesure réalisée.

Pour étudier les probabilités dans un schéma de Bernoulli, on utilise la Loi Binomiale (à ne pas confondre avec la Loi Hypergéométrique, plus complexe, qui s'utilise quand les épreuves de Bernoulli successives ne sont pas indépendantes les unes des autres). Nous allons voir en quoi consiste cette loi.

Loi Binomiale

Intérêt de la Loi Binomiale :
Cette loi permet de calculer la probabilité qu'un certain nombre de succès (noté « k ») se produisent dans un schéma de Bernoulli, c'est-à-dire lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques. *Des notions basiques de probabilités (niveau 3ème) sont nécessaires à sa compréhension.*

Explication du fonctionnement de la Loi Binomiale :
1) On calcule le nombre d'issues dans l'arbre qui réalisent k succès parmi n tentatives.
2) Toutes ces issues ont la même probabilité : la probabilité de succès (p) multipliée autant de fois que le nombre de succès (n), multipliée par la probabilité d'échec (1 – p) multipliée autant de fois que le nombre d'échecs (n – k).
3) On multiplie cette probabilité par le nombre d'issues calculée au (1).

Fonctionnement mathématique de la loi binomiale :

1) Nombre d'issues dans l'arbre qui réalisent k succès parmi n tentatives : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Cette opération s'appelle une combinaison.
Une calculatrice sait la réaliser sans passer par les opérateurs factoriels (!).

2) Toutes ces issues ont la même probabilité : $p^k(1-p)^{(n-k)}$

3) La probabilité qu'une variable aléatoire (notée « X ») égale k succès se note P(X = k).
On a donc : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$

Application dans le cadre de notre étude :
Si on considère que p est la probabilité qu'un angle soit remarquable, que n est le nombre de mesures d'angles réalisées lors de notre étude et que k est le nombre d'angles remarquables trouvés parmi les mesures, alors nous sommes capables, une fois ces paramètres établis, de calculer la probabilité qu'une telle situation se produise si les mégalithes étaient disposées aléatoirement.

Remarque sur la méthode d'application de la loi binomiale dans notre cas :

La Loi Binomiale telle que nous venons de la décrire va calculer la probabilité de trouver <u>exactement</u> k angles remarquables. Il serait plus juste de calculer la probabilité de trouver <u>au moins</u> k angles remarquables. En effet, lorsqu'on constate qu'on a mesuré k angles remarquables, la question que l'on se pose n'est pas « Quelles étaient les chances pour que je trouve ce nombre de <u>précis</u> d'angles remarquables ? » mais plutôt « Quelles étaient les chances pour que je trouve autant d'angles remarquables ? ». Autrement dit, « Quelles étaient les chances pour que je trouve <u>au moins</u> ce nombre d'angles remarquables ? ».

Mathématiquement, cela se traduit par le remplacement de $P(X = k)$ par $P(X \geq k)$, ce qui influence la méthode de calcul :

$$P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$$

$$= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + ... + P(X=k))$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{k} P(X=i)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{(n-i)}$$

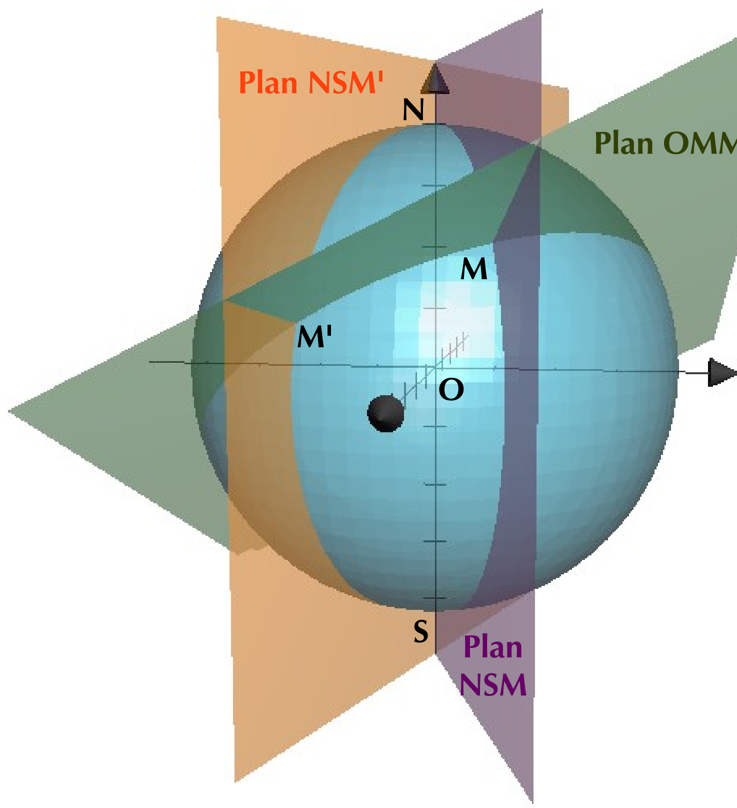
Avec cette nouvelle méthode, nous pouvons calculer la probabilité de trouver au moins k angles remarquables. Pour la mettre en œuvre, on pourra utiliser une calculatrice capable de calculer les sommes itératives (une TI 89 par exemple) ou plus simplement un logiciel de calcul (Xcas, WolframAlpha...).
Nous allons maintenant voir comment déterminer les différents paramètres de la formules (n, p et k).

Détermination du paramètre « n »

Le n correspond au nombre de mesures réalisées. Il peut être calculé à partir du nombre de mégalithes étudiés. A première vue, il existe un angle mesurable pour chaque doublet de mégalithes différents. En effet, chaque doublet permet de tracer une droite, et on mesure alors l'angle qu'elle forme avec l'axe nord-sud. En réalité, la chose n'est pas aussi simple, car la Terre n'est pas plate, mais ronde ! Lorsqu'on cherche à mesurer l'angle que forment deux mégalithes par rapport à l'axe nord-sud, il ne s'agit pas de mesurer l'angle entre deux droites, mais entre deux arcs de cercle. Pour résoudre ce problème, deux solutions sont possibles :

1) Utiliser une géométrie non-euclidienne, la géométrie sphérique : en négligeant l'altitude, on peut assimiler la Terre à une sphère et calculer les angles dans un repère sphérique. Une telle solution n'est pas évidente à mettre en place car nous avons l'habitude de raisonner avec la géométrie euclidienne.

2) Utiliser la géométrie euclidienne en trois dimensions : si on place la Terre dans un repère à trois dimensions, on peut définir les coordonnées des deux mégalithes. Si on appelle M et M' les deux points correspondants, O le centre de la Terre, N le pôle nord et S le pôle sud, on se rend compte qu'il existe deux manières différentes de définir l'angle que forment deux mégalithes par rapport à « l'axe » nord-sud. On peut soit calculer l'angle formé par les plans OMM' et NSM, soit calculer l'angle formé par les plans OMM' et NSM'. Il convient donc de prendre en compte les deux angles si leur différence est significative. La figure ci-contre illustre l'explication.



Cette seconde solution montre qu'il n'existe pas un angle par doublet de mégalithes différents, mais deux. Pour trouver n, il faut donc calculer le nombre de doublets et le multiplier par deux.

Calcul du nombre de doublets (on appellera « m » le nombre de mégalithes) :
Ce calcul fait appelle aux bases de la théorie des graphes, en posant la question : si on dispose de m points que l'on souhaite tous relier entre eux, combien doit-on tracer de traits ? Il est facile de répondre à cette question avec un simple tableau à double entrée :

On supprime les cas absurdes

On supprime les doublons

	M_1	M_2	M_3	...	M_m
M_1	M_1M_1	M_1M_2	M_1M_3	...	M_1M_m
M_2	M_2M_1	M_2M_2	M_2M_1	...	M_2M_m
M_3	M_3M_1	M_3M_2	M_3M_3	...	M_3M_m
...	...	...	...	...	...
M_m	M_mM_1	M_mM_2	M_mM_3	...	M_mM_m

Nombre de cases = m^2

	M_1	M_2	M_3	...	M_m
M_1	$\cancel{M_1M_1}$	M_1M_2	M_1M_3	...	M_1M_m
M_2	M_2M_1	$\cancel{M_2M_2}$	M_2M_1	...	M_2M_m
M_3	M_3M_1	M_3M_2	$\cancel{M_3M_3}$	...	M_3M_m
...	...	...	...	$\cancel{}$	...
M_m	M_mM_1	M_mM_2	M_mM_3	...	$\cancel{M_mM_m}$

Nombre de cases = m^2 **– m**

	M_1	M_2	M_3	...	M_m
M_1	$\cancel{M_1M_1}$	M_1M_2	M_1M_3	...	M_1M_m
M_2	$\cancel{M_2M_1}$	$\cancel{M_2M_2}$	M_2M_1	...	M_2M_m
M_3	$\cancel{M_3M_1}$	$\cancel{M_3M_2}$	$\cancel{M_3M_3}$	...	M_3M_m
...	$\cancel{...}$	$\cancel{...}$	$\cancel{...}$	$\cancel{}$	...
M_m	$\cancel{M_mM_1}$	$\cancel{M_mM_2}$	$\cancel{M_mM_3}$	$\cancel{}$	$\cancel{M_mM_m}$

Nombre de cases = $(m^2$ **– m**$)$**/2**

Le nombre de doublets en fonction du nombre de mégalithes (m) est donc de **$(m^2 – m)/2$**. Il ne reste plus qu'à le multiplier par deux pour trouver n. On a donc $n = m^2 – m$, ou encore, si on factorise :

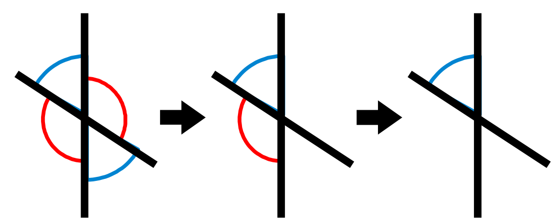
$$\mathbf{n = m(m – 1)}$$

Détermination du paramètre « p »

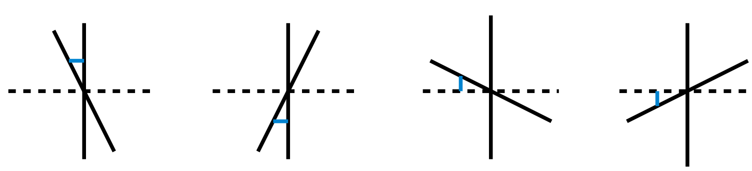
Définition de p :
Le p correspond à la probabilité qu'un angle soit remarquable. Il était noté p(R) au début du document, mais puisqu'il s'agit de la seule probabilité intervenant dans notre méthode, nous abrégerons son écriture. Elle se calcul en divisant le nombre d'angles considérés comme remarquables (noté « r ») par le nombre d'angles mesurables (noté « a »).

Détermination de a, le nombre d'angles mesurables :
En théorie, un angle est un nombre réel compris entre 0 et 360 (si on le mesure en degrés). Il peut donc prendre une infinité de valeurs. En pratique, il va nous être impossible de mesurer toute les décimales de l'angle, car on ne peut jamais avoir une précision de mesure aussi grande que l'on veut. Cette précision (notée « δ ») devra donc être choisie à l'avance (par exemple 1/10 de degré ou 1/100 de degré). Elle va fixer le nombre de décimales des angles mesurés, et le nombre de mesures possibles va donc devenir fini et calculable.

Le second paramètre à connaître est la plage de mesure, c'est à dire les angles minimum et maximum que l'on va mesurer. Lorsque deux droites ou deux plans se coupent, ils forment géométriquement quatre angles. Ses angles étant égaux deux à deux), on peut commencer par n'en considérer que deux. Toutefois, on ne retiendra que le plus petit pour caractériser l'angle (figure de droite).

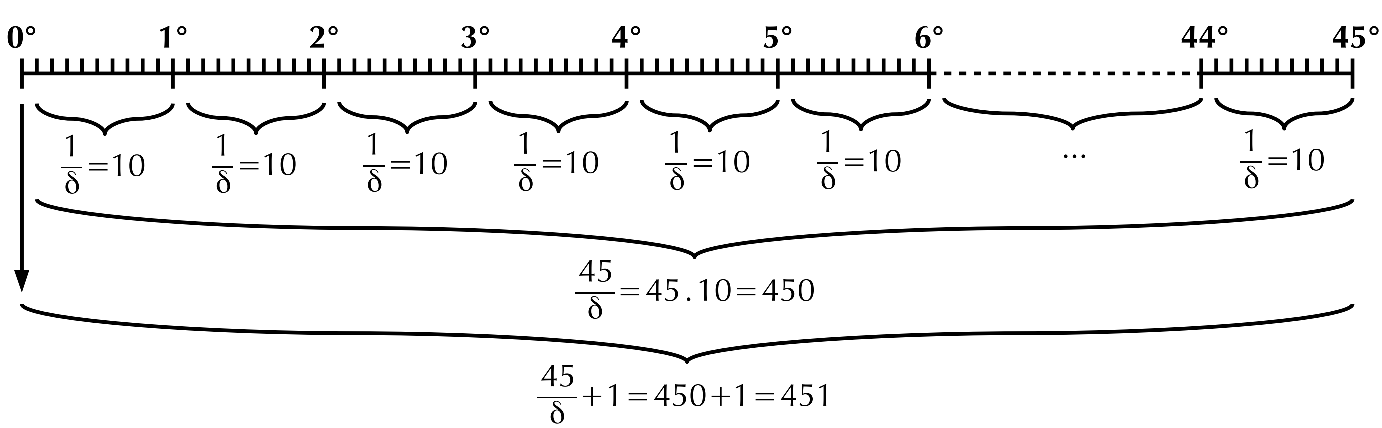


On considérera aussi que les cas présentés sur la figure ci-dessous sont équivalents, c'est-à-dire qu'un angle donné peut caractériser quatre configurations géométriques :



On ne mesurera donc pas des angles compris entre 0 et 360° mais entre 0 et (360/4)° c'est-à-dire entre 0 et 45°.

Le nombre d'angles mesurables « a » peut maintenant être déterminé : pour chaque degré, il y aura autant d'angles mesurables que l'inverse de la précision. On ajoutera 1 au tout pour prendre en compte l'angle 0°. La figure ci-dessous illustre ces propos pour δ = 1/10.



On en conclut que le nombre d'angles mesurables est donné par la formule : $\boxed{a=\frac{45}{\delta}+1}$

Détermination de r, le nombre d'angles remarquables :

Avant de pouvoir en déterminer le nombre, il nous faut définir ce que l'on entend par « remarquable ». Un angle sera qualifié de remarquable s'il est en lien avec l'architecture sacrée. Il convient de rechercher en priorité ce qui est le plus simple, c'est à dire des angles formés par des figures géométriques élémentaires à base de carrés modulaires. Il n'est donc pas judicieux de rechercher des angles formés par des structures dépassant les 10 chiffres que comporte la base 10.

Sera donc considéré comme remarquable un angle :

- nul ;	0°
- droit ;	90°
- égal à l'angle formé par la base et la diagonale d'un carré ;	45°
- égal à l'angle formé par la base et la diagonale d'un rectangle constitué :	
- d'une suite de 2 carrés ;	26,56°
- d'une suite de 3 carrés ;	18,43°
- d'une suite de 4 carrés ;	14,04°
- d'une suite de 5 carrés ;	11,31°
- d'une suite de 6 carrés ;	9,46°
- d'une suite de 7 carrés ;	8,13°
- d'une suite de 8 carrés ;	7,12°
- d'une suite de 9 carrés ;	6,34°
- égal à l'angle formé par la base et la diagonale d'un rectangle :	
- de proportions 2/3 ;	33,69°
- de proportions 3/5 ;	30,96°
- de proportions 4/5 ;	38,66°
- de proportions 5/7 ;	35,54°
- égal à l'angle formé par la base et l'hypoténuse d'un triangle rectangle :	
- de dimensions 3 – 4 – 5 ;	36,87°
- de dimensions 5 – 12 – 13 ;	22,62°
- de dimensions 7 – 24 – 25 ;	16,26°

La colonne de valeur ci-dessus à droite donne une idée des valeurs des angles dont il est question, arrondies au centième de degré. On pourra donc considérer environ 21 angles comme remarquables. Il n'est pas exclu que ce chiffre varie selon le sujet de l'étude, mais jamais dans des proportions trop importantes.

Détermination de p, la probabilité qu'un angle soit remarquable :

Comme nous l'avions précédemment défini, $p=\frac{r}{a}$

Les études de r et a étant faites, on conclut que $p=\frac{r}{\frac{45}{\delta}+1}$ ou si on préfère, $\boxed{\mathbf{p=\frac{r\,\delta}{45+\delta}}}$

Détermination du paramètre « k »

Le k correspond au nombre d'angles remarquables trouvés lors de la série de mesures, donc il ne se calcule pas, il se constate, tout simplement. Il suffit pour cela de comparer tous les angles mesurés avec les angles considérés comme remarquables et de compter combien sont identiques, en tenant compte de la précision δ choisie pour l'étude.

Résumé des formules :

Nous venons de démontrer les trois formules suivantes :

$$P(X \geq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{(n-i)}$$

$$n = m(m-1)$$

$$p = \frac{r\delta}{45+\delta}$$

Conclusion :

$$P(X \geq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{m(m-1)}{i} \left(\frac{r\delta}{45+\delta}\right)^{i} \left(1 - \frac{r\delta}{45+\delta}\right)^{[m(m-1)-i]}$$

k : le nombre d'angles remarquables parmi les angles mesurés
m : le nombre de mégalithes du complexe étudié
r : le nombre d'angles remarquables pris en compte dans l'étude
δ : la précision choisie pour l'étude (en degrés)

Cette formule peut être mise en œuvre pour n'importe quel étude similaire à celle décrite en introduction. Il suffit juste de choisir les valeurs appropriées pour les quatre paramètres décrits.

Utilisation concrète de la formule :

Puisqu'elle est un peu complexe à utiliser nous avons créé un tableur qui met cette formule en œuvre automatiquement. Il suffit de rentrer les quatre paramètres en respectant les conditions suivantes :

- k entier et compris entre 0 et 30 (ce maximum pourrait être augmenté si besoin) ;
- m entier et positif ;
- r entier et inférieur ou égal au n calculé par le tableur quand le m est validé ;
- δ inférieur à 1°.

En voici une impression d'écran :

Nombre d'angles remarquables parmi les angles mesurés	k	7
Nombre de mégalithes du complexe étudié	m	15
Nombre d'angles remarquables pris en compte dans l'étude	r	21
Précision angulaire choisie (en degrés)	δ	0,01
Nombre d'angles mesurables	n	210
Probabilité qu'un angle soit remarquable	p	0,0046656299

Remplir les cellules vertes pour obtenir un résultat.

Il y a environ une chance sur
14675
pour que les mégalithes
aient été disposés au hasard.

i	P(X = i)	P(X < i)	P(X ≥ i)	environ 1 chance sur
0	0,37453311	0,00000000	1,00000000	1
1	0,36868103	0,37453311	0,62546689	2
2	0,18059610	0,74321415	0,25678585	4
3	0,05869373	0,92381025	0,07618975	13
4	0,01423782	0,98250398	0,01749602	57
5	0,00274968	0,99674180	0,00325820	307
6	0,00044038	0,99949148	0,00050852	1966
7	0,00006016	0,99993186	0,00006814	14675
8	0,00000716	0,99999201	0,00000799	125220
9	0,00000075	0,99999917	0,00000083	1204368
10	0,00000007	0,99999992	0,00000008	12906274
11	0,00000001	0,99999999	0,00000001	152647443
12	0,00000000	1,00000000	0,00000000	1976999806
13	0,00000000	1,00000000	0,00000000	27858983078
14	0,00000000	1,00000000	0,00000000	426376296082
15	0,00000000	1,00000000	0,00000000	7550041286455
16	0,00000000	1,00000000	0,00000000	#DIV/0 !
17	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-91910196476949
18	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
19	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
20	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
21	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
22	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
23	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
24	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
25	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
26	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
27	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
28	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
29	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480
30	0,00000000	1,00000000	0,00000000	-88305875046480