

Quelques idées reçues sur la position du Soleil

Alexandre Vial
Université de Technologie de Troyes
Pôle Physique, Matériaux et Nanotechnologies
12, rue Marie Curie - BP 2060 10010 Troyes
alexandre.vial@utt.fr

Version originale : A. Vial, Bull. Un. Prof. Phys. Chim., 101(897) :959-980, octobre 2007

Résumé

À partir de l'ellipticité de la trajectoire de la Terre et de l'obliquité de son axe de rotation on détermine l'équation du temps, qui combinée avec la position du Soleil dans le repère local horizontal permet la détermination des azimuts ainsi que les variations des heures de lever du Soleil à différentes latitudes. On établit ainsi quelques vérités sur la position du Soleil à différents moments de la journée.

1 Introduction

Depuis que l'Homme a cessé d'utiliser le Soleil pour se repérer dans le temps et dans l'espace, ses connaissances moyennes le concernant ainsi que celles concernant le mouvement de la Terre se sont réduites à quelques approximations plus ou moins justifiées : il se lève à l'Est, se couche à l'Ouest, il est au zénith et indique le Sud à midi, il se lève le plus tard le jour le plus court, la Terre tourne sur elle-même en 24 heures, etc.

Dans cet article, nous considérerons dans un premier temps la situation idéale de la trajectoire circulaire de la Terre autour du Soleil, puis nous introduirons différentes corrections à cette situation afin d'arriver à une situation plus réaliste. À l'aide des équations donnant la position du Soleil dans le plan horizontal local en fonction de la déclinaison et de l'angle horaire, l'influence de ces corrections sera évaluée et discutée par rapport aux approximations citées auparavant.

2 L'équation du temps

Depuis Copernic, on sait que la Terre tourne autour du Soleil, et Kepler a montré plus tard que cette trajectoire n'était pas un cercle, mais une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers. L'écart entre la trajectoire circulaire et la trajectoire elliptique est très faible et n'est pas graphiquement visible, à moins d'exagérer fortement l'ellipticité de la trajectoire réelle. Cependant, cette faible différence de trajectoire se traduit dans les faits par une irrégularité de l'heure de passage au méridien local du Soleil, à laquelle s'ajoute une deuxième irrégularité provenant de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre sur elle-même par rapport à la normale au plan de rotation autour du Soleil (plan de l'écliptique).

2.1 Cas de la trajectoire circulaire

Dans un premier temps, considérons que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est un cercle. Un jour solaire est défini comme le temps moyen entre deux passages successifs du Soleil au méridien local, et cette durée vaut 24 heures. Sur la figure 1, on se rend bien compte qu'en 24 heures, la Terre a tourné de plus de 360° , elle a donc fait plus d'un tour sur elle-même. L'angle supplémentaire (noté θ sur la figure) est égale à l'angle qu'à parcouru la Terre autour du Soleil en 24 heures. Par conséquent, sachant que la Terre effectue une rotation autour du Soleil en 365,2564 jours (durée de l'année sidérale), le temps t_θ nécessaire pour tourner de l'angle θ vérifie $t_\theta/24 = 1/365,2564$, soit $t_\theta = 3\text{min}56\text{s}$. Donc la Terre effectue une rotation de 360° en 23h56min4s, c'est ce qu'on appelle le *jour stellaire* (le jour sidéral est lié à l'année tropique [1], et plus court de 8 millièmes de secondes).

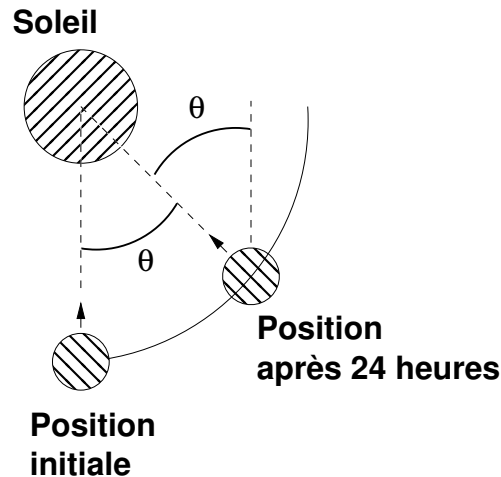


FIG. 1 – Déplacement de la Terre sur une trajectoire idéale circulaire autour du Soleil.

2.2 Influence de l'ellipticité de la trajectoire

2.2.1 Anomalie moyenne

Imaginons encore quelques instants que la Terre se déplace sur un cercle. On appelle *anomalie moyenne* (que l'on note M) l'angle parcouru sur ce cercle par la Terre par rapport à une position de référence. On calcule donc d'abord l'anomalie moyenne M en fonction du jour julien J (l'utilisation des jours juliens permet une numérotation continue des jours, indépendamment de la durée des années) :

$$M = M_0 + M_1(J - J_{2000}), \quad (1)$$

avec $J_{2000} = 2451545$, $M_0 = 357,5291^\circ$ et $M_1 = 0,9856^\circ/\text{jour}$ pour la Terre. La valeur de M_0 correspond à la position de la Terre le 1er janvier 2000 à 12h UTC par rapport à la position de référence (le périhélie) ; on peut en déduire que la Terre est au plus près du Soleil vers le 3 janvier, et seuls les habitants de l'hémisphère sud sont en droit de penser qu'il fait plus chaud quand le Soleil est plus proche. La conversion d'une date du calendrier classique (calendrier grégorien) en jour julien est détaillée dans l'annexe A.

2.2.2 Anomalie vraie

Dans les faits, la trajectoire de la Terre est une ellipse. Par conséquent, sa position n'est plus une fonction linéaire de la date julienne, elle se déplace plus rapidement lorsqu'elle est près du Soleil que

lorsqu'elle en est éloignée (seconde loi de Kepler, ou loi des aires). Pour tenir compte de l'ellipticité de la trajectoire, on doit corriger M d'une quantité C appelée équation du centre, de manière à obtenir l'anomalie vraie ν :

$$\nu = C + M. \quad (2)$$

Le calcul fait intervenir l'excentricité e de la trajectoire (voir les détails en annexe B, ainsi que la référence [2] pour une démonstration très complète) et on obtient pour finir :

$$C = (2e - \frac{1}{4}e^3) \sin(M) + \frac{5}{4}e^2 \sin(2M) + \frac{13}{12}e^3 \sin(3M). \quad (3)$$

Connaissant l'excentricité $e = 0,01671$, on trouve (en degrés)

$$C = 1,9148^\circ \sin(M) + 0,0200^\circ \sin(2M) + 0,0003^\circ \sin(3M). \quad (4)$$

Une manière plus intuitive de comprendre le phénomène consiste à se dire que si la Terre avance plus vite sur sa trajectoire (ce qui est le cas au périhélie), alors après 24 heures le Soleil apparaîtra plus à l'Est que sa position «idéale», il sera en retard par rapport à l'heure moyenne (figure 2). Au contraire, si la Terre avance moins vite, alors le Soleil sera en avance par rapport à l'heure moyenne.

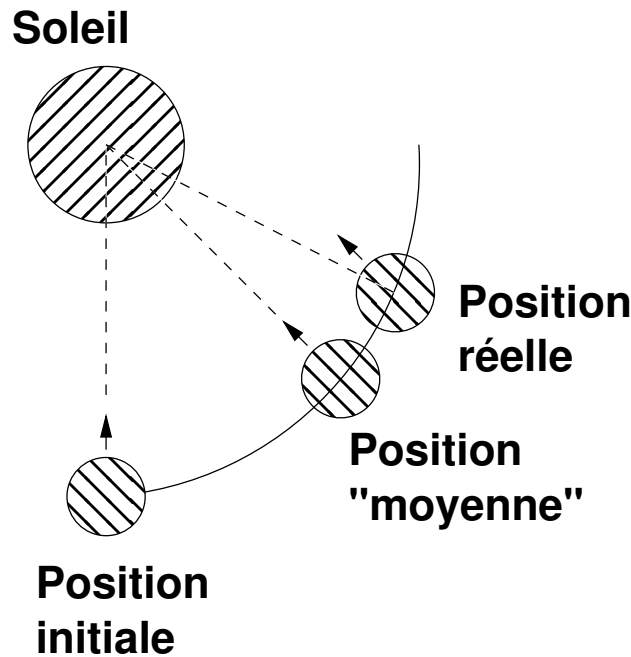


FIG. 2 – Influence de l'ellipticité de la trajectoire de la Terre sur l'équation du temps. La Terre se déplace ici avec une vitesse supérieure à sa vitesse moyenne du fait de sa proximité avec le périhélie de sa trajectoire.

2.3 Influence de l'obliquité

Du fait de la non coïncidence entre le plan de l'écliptique et le plan de l'équateur céleste (l'angle entre ces deux plans est égal à l'inclinaison de l'axe de la terre, soit $\epsilon = 23^\circ 26' = 23,43^\circ$), les angles azimutaux permettant de repérer le Soleil dans chacun de ces deux plans, la longitude écliptique λ_s et l'ascension droite α_s respectivement, ne vont pas être identiques, et leur différence représente un nouvel écart entre la position réelle du Soleil et sa position moyenne, qui est celle qu'il aurait si l'axe

de la Terre n'était pas incliné. On appelle réduction à l'équateur et on notera R cette contribution, dont le calcul est précisé en annexe C :

$$R = \left(-\frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{1}{24}\epsilon^4 - \frac{17}{2880}\epsilon^6\right) \sin(2\lambda_s) + \left(\frac{1}{32}\epsilon^4 + \frac{1}{96}\epsilon^6\right) \sin(4\lambda_s) - \frac{1}{192}\epsilon^6 \sin(6\lambda_s), \quad (5)$$

avec

$$\lambda_s = 280,47^\circ + M_1(J - J_{2000}) + C. \quad (6)$$

Après calcul on obtient

$$R = -2,4680^\circ \sin(2\lambda_s) + 0,0530^\circ \sin(4\lambda_s) - 0,0014^\circ \sin(6\lambda_s). \quad (7)$$

Le lecteur pourra encore une fois se référer à la référence [2] pour une étude très complète, ainsi qu'aux nombreuses animations disponibles sur le site [3].

2.4 Conséquences de l'ellipticité et de l'obliquité

Nous avons vu précédemment que du fait de l'ellipticité de la trajectoire de la Terre et de l'inclinaison de son axe de rotation par rapport au plan de l'écliptique, deux corrections devaient être introduites pour calculer la position du soleil par rapport au cas idéal d'un mouvement circulaire dans le plan de l'équateur. La somme de ces deux corrections, appelée *Équation du temps* (figure 3) [4, 5], donne l'écart ΔT (en minutes) entre le temps moyen et le temps vrai. L'équation du temps s'annule quatre fois par an, aux environs du 16 avril, 13 juin, 2 septembre et 25 décembre. Elle atteint son minimum (-16 minutes 25 secondes) le 3 novembre et son maximum (14 minutes 14 secondes) le 11 février (calculs pour l'année 2006). La première étude de cette équation (au sens du XVIII^e siècle, c'est-à-dire correction) est due à l'astronome anglais John Flamsteed en 1672.

$$\Delta T(\text{min}) = (C + R) \times \frac{60}{15}. \quad (8)$$

Lorsque l'équation du temps est positive, le soleil est en retard sur l'horloge, et lorsque l'équation du temps est négative, le soleil est en avance sur l'horloge.

Une des conséquences de l'équation du temps est que si l'on représente la position du Soleil dans le ciel pour une heure fixe tous les jours de l'année, alors on obtient une courbe appelée *analemme* (figures 4 et 5) [6]. C'est cette courbe qui est parfois représentée sur les cadrans solaires autour de la ligne du midi vrai. C'est à Jean-Paul Grandjean de Fouchy que l'on doit le premier tracé d'analemme autour d'une méridienne vers 1730.

Une seconde conséquence de l'équation du temps, décrite dans la section suivante, est que les heures de lever et de coucher du Soleil ne sont pas uniquement régies par la déclinaison du Soleil.

Il faut noter que la définition choisie pour l'équation du temps n'est pas universelle, il semble que la plupart des pays anglo-saxons utilise la convention opposée, à savoir équation du temps = temps vrai - temps moyen. La définition «française» a l'avantage de donner une valeur qu'il suffit d'ajouter à l'heure indiquée par un cadran solaire pour avoir l'heure légale (sans oublier la correction en longitude et le fuseau horaire).

À cause de l'équation du temps, il n'est donc jamais midi (vrai) à la même heure, et l'heure légale associée peut varier dans une plage de trente minutes.

3 Le Soleil, le temps et les points cardinaux

Dans un article précédent [8], nous avons obtenu les équations reliant la hauteur h et l'azimut A du Soleil dans le plan horizontal local pour la latitude ϕ à la déclinaison δ_s et à l'angle horaire H du

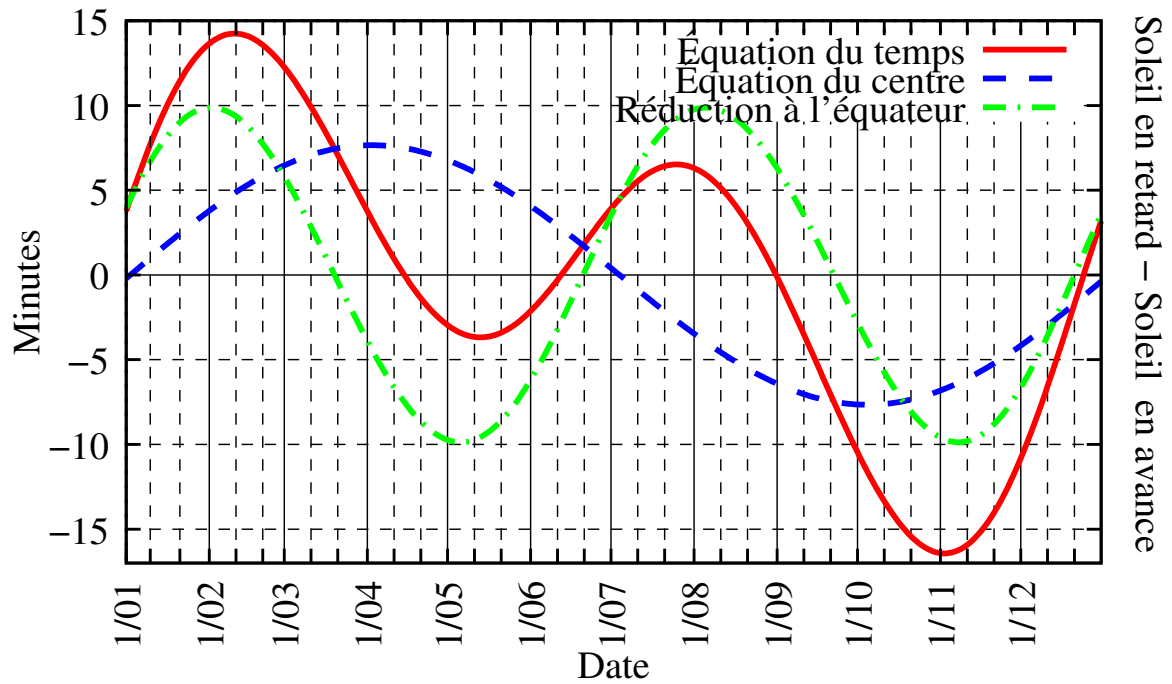


FIG. 3 – Équation du temps (en minutes). L'influence respective de l'ellipticité (équation du centre) et de l'obliquité (réduction à l'équateur) est également présentée.

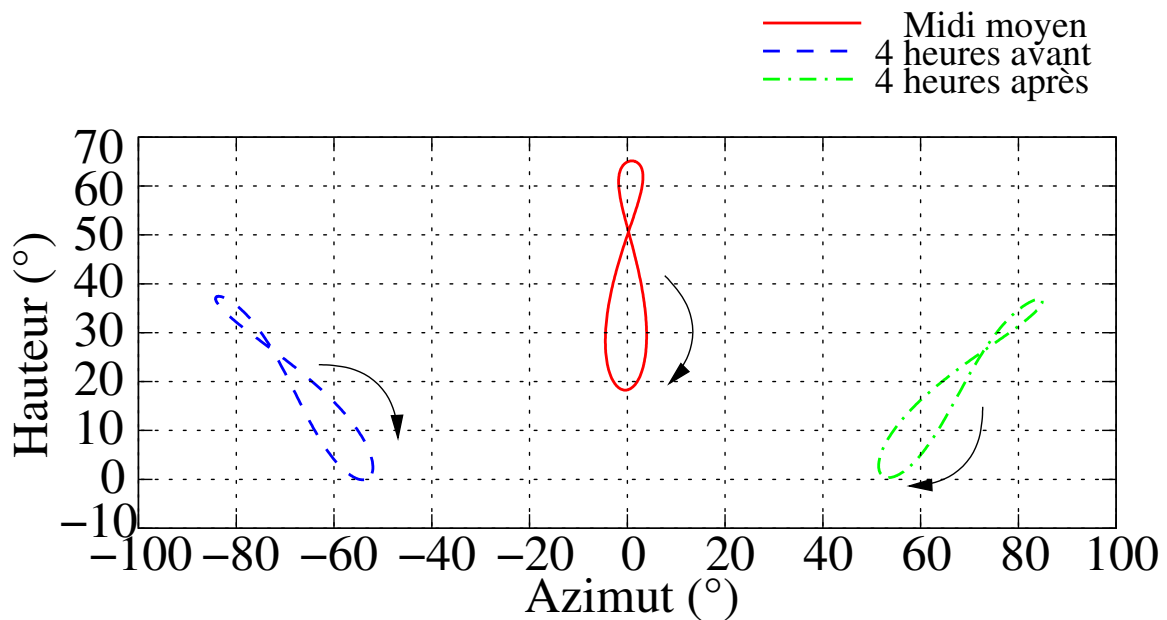


FIG. 4 – Position du Soleil dans le ciel à midi moyen, quatre heures auparavant et quatre heures après.

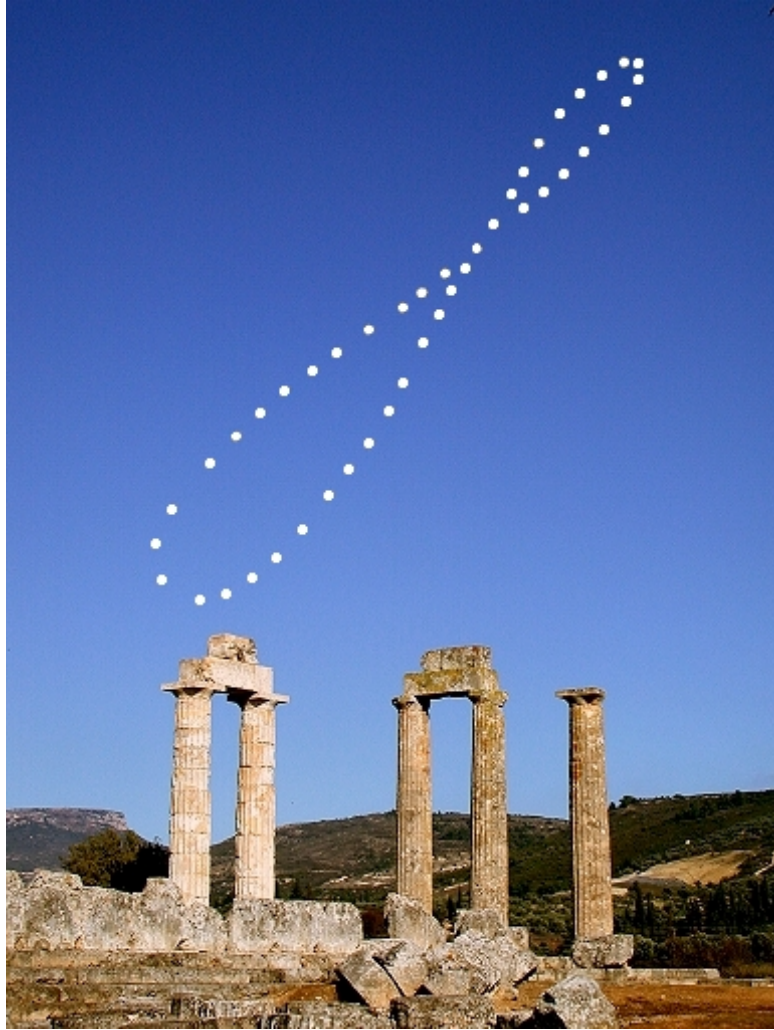


FIG. 5 – Analemme photographié par Anthony Ayiomamitis à Athènes, du 7 janvier au 20 décembre 2003. Reproduit avec l'aimable autorisation de l'auteur [7].

Soleil.

$$\cos h \cos A = \sin \phi \cos \delta_s \cos H - \cos \phi \sin \delta_s, \quad (9a)$$

$$\cos h \sin A = \cos \delta_s \sin H, \quad (9b)$$

$$\sin h = \cos \phi \cos \delta_s \cos H + \sin \phi \sin \delta_s. \quad (9c)$$

On rappelle qu'à midi vrai, $H = 0$, et que H varie de 15° par heure (il est négatif le matin et positif l'après-midi).

Par la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement à deux villes de l'hémisphère Nord, Paris ($\phi = 48^\circ 51'N$) et Yaoundé ($\phi = 4^\circ N$).

3.1 Le jour le plus court, le Soleil se lève-t-il le plus tard ?

Partant de l'équation (9c), on peut déduire les angles horaires de coucher et de lever du Soleil en posant $h = 0$, ce qui conduit à

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta_s. \quad (10)$$

La fonction cosinus étant paire, les angles horaires de lever et de coucher du Soleil sont parfaitement symétriques par rapport au midi vrai défini par $H = 0$.

$$H_{lever} = -\arccos(-\tan \phi \tan \delta_s), \quad (11a)$$

$$H_{coucher} = \arccos(-\tan \phi \tan \delta_s). \quad (11b)$$

Mais à cause de l'équation du temps, les heures réelles de lever et de coucher du Soleil doivent être décalées d'une quantité Δt telle que définie par l'équation (8).

$$H_{lever}^* = 12 - \arccos(-\tan \phi \tan \delta_s) \cdot \frac{12}{\pi} + \frac{\Delta t}{60}, \quad (12a)$$

$$H_{coucher}^* = 12 + \arccos(-\tan \phi \tan \delta_s) \cdot \frac{12}{\pi} + \frac{\Delta t}{60}. \quad (12b)$$

La durée du jour étant le temps écoulé entre le lever et le coucher du Soleil, on en déduit qu'elle se calcule (en heure) grâce à la formule :

$$D_{jour} = H_{coucher}^* - H_{lever}^* = 2 \arccos(-\tan \phi \tan \delta_s) \cdot \frac{12}{\pi}, \quad (13)$$

elle est indépendante de Δt . La fonction \arccos est décroissante sur l'intervalle $[-1; 1]$, donc pour une latitude positive, la durée du jour sera maximale lorsque la déclinaison sera maximale, et elle sera minimale lorsque la déclinaison sera minimale, ce qui correspond aux solstices d'été et d'hiver.

La variation de l'heure de lever (et de coucher) du Soleil pour une latitude fixe (calculée comme $H_{lever}^*(j) - H_{lever}^*(j-1)$ pour le jour j de l'année) est liée à deux causes : la déclinaison du Soleil et l'équation du temps. Les deux contributions sont comparées sur la figure 6 pour la latitude de Paris. On voit que pour cette latitude, la contribution de l'équation du temps est généralement faible par rapport à la contribution de la déclinaison, par conséquent la variation de l'heure de lever est peu différente de ce qui se passerait sans l'équation du temps. La différence la plus visible concerne en fait la date pour laquelle la variation s'annule.

La variation de l'heure de lever s'annule lorsque l'heure de lever est minimale ou maximale. D'après les équations (11a), (11b) et (13), on voit qu'en l'absence de l'équation du temps, le jour le plus court sera celui où le Soleil se lève le plus tard et se couche le plus tôt. Mais du fait de l'équation du temps, la date du lever le plus tardif est légèrement décalée par rapport au solstice d'hiver. Pour

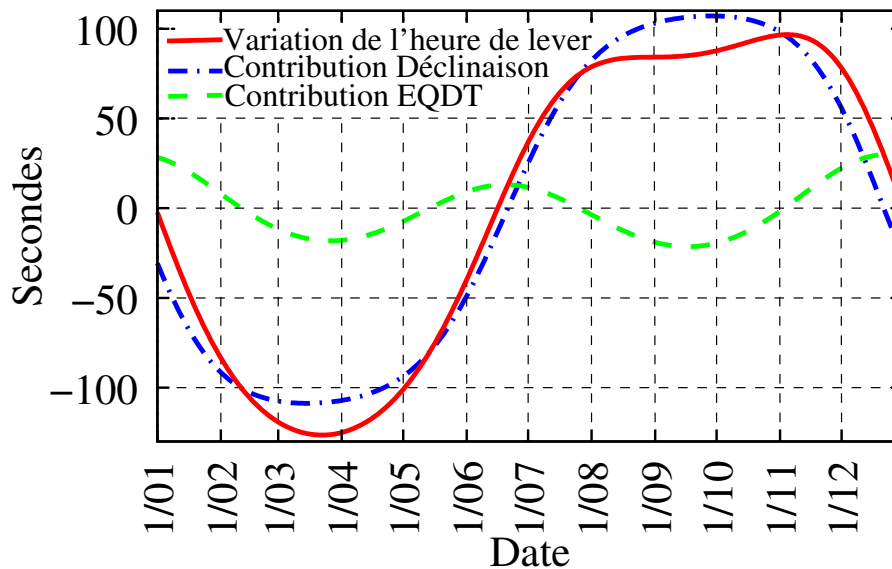


FIG. 6 – Variation de l’heure de lever du Soleil à Paris (latitude $48^{\circ}51'N$) en fonction de la date. Contributions de la déclinaison et de l’équation du temps.

résumer la situation, on peut dire que le lever le plus tardif a lieu plus tard que le solstice d’hiver, le lever le plus matinal a lieu avant le solstice d’été, le coucher le plus tardif a lieu plus tard que le solstice d’été, et le coucher le plus précoce a lieu avant le solstice d’hiver. Par conséquent au début de l’hiver en France, même si les jours rallongent, le Soleil continue pendant quelques jours à se lever plus tard.

Sur la figure 7, nous avons représenté les variations de l’heure de lever du Soleil en fonction de la latitude et du jour de l’année. Plus on descend en latitude, plus l’influence de l’équation du temps est prépondérante (à la limite, pour $\phi = 0^{\circ}$, seule l’équation du temps contribue), et pour des latitudes comprises entre -10° et 10° , la variation de l’heure de lever change quatre fois de signe, contre deux fois par ailleurs. Ainsi d’août à octobre, alors que la durée du jour diminue, le Soleil se lève-t-il de plus en plus tôt à Yaoundé, pendant qu’à Paris il se lève de plus en plus tard avec la variation quotidienne la plus forte.

Une autre manière de répondre à la question posée dans cette partie repose sur l’analemme. Si on la représente pour l’angle horaire correspondant au lever du Soleil le jour le plus court de l’année (jour du solstice d’hiver) pour la latitude de Paris (figure 8), on s’aperçoit qu’une petite partie se situe sous l’horizon, ce qui signifie que pendant les jours correspondants à cette partie de la courbe, à la même heure donc, le Soleil ne sera pas encore levé.

3.2 Le Soleil perd le Nord

En France métropolitaine, nous avons l’habitude d’avoir le Soleil au Sud lorsqu’il atteint son zénith. Nous sommes généralement également convaincus (et certains ont pu avoir la chance de le vérifier) que dans l’hémisphère Sud, le Soleil sera au Nord à son point le plus haut. Pourtant, tout n’est pas aussi simple.

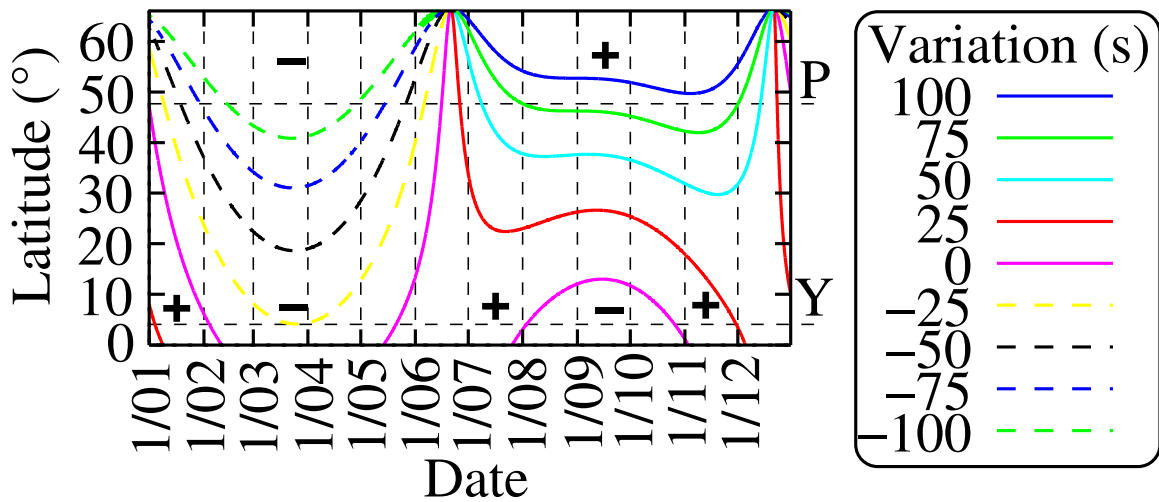


FIG. 7 – Comparaison des variations de l’heure de lever du Soleil à différentes latitudes en fonction de la date. Les lettres P et Y correspondent aux latitudes de Paris et Yaoundé respectivement.

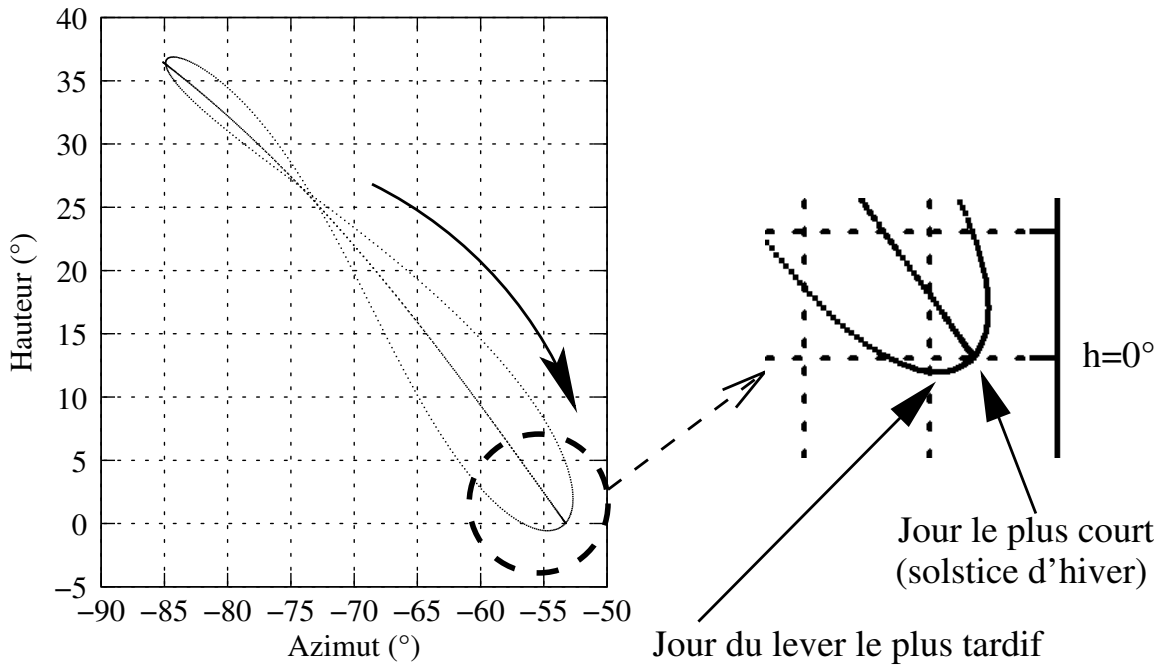


FIG. 8 – Analemma calculée pour l’angle horaire correspondant au lever du Soleil le jour le plus court de l’année pour la latitude de Paris. La partie de l’analemma située sous l’axe $h = 0^\circ$ correspond aux jours de l’année (plus longs que le jour le plus court) pour lesquels le soleil n’est pas levé à cette heure du lever du jour le plus court. Ces jours là, le soleil va donc se lever plus tard que le jour le plus court.

3.2.1 Il est midi (vrai)

D'après les équations (9a) et (9c), à midi vrai ($H = 0$ et $A = 0$), la hauteur du Soleil est donnée par :

$$\tan h = \frac{1}{\tan(\phi - \delta_s)} \implies h = \frac{\pi}{2} - (\phi - \delta_s). \quad (14)$$

Pour une latitude supérieure à la déclinaison maximale ϵ , on vérifie $0 < h < \pi/2$, et si l'on se place face au Sud, le Soleil sera toujours visible. À la limite, il pourra être très exactement à la verticale le jour du solstice d'été si l'on se situe sur le tropique du Cancer. Au contraire, dans l'hémisphère sud, pour des latitudes comprises entre celles du tropique du Capricorne et le cercle polaire, le soleil ne sera visible que si l'on est face au Nord ($\pi/2 < h < \pi$).

Le cas de figure le plus intéressant se présente dans la zone comprise entre les tropiques. En effet, il est alors possible que le Soleil indique soit le Sud, soit le Nord, selon sa déclinaison. Ceci est représenté graphiquement sur la figure 9. La position du Soleil à midi vrai est représentée pour

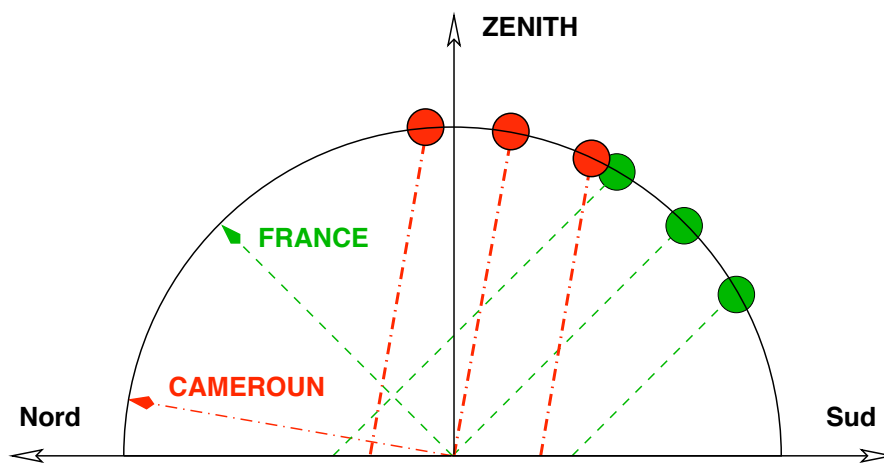


FIG. 9 – Le Soleil pas toujours au Sud à midi vrai, même dans l'hémisphère nord.

les solstices et une équinoxe, pour Paris et Yaoundé respectivement. On voit bien qu'au moment du solstice d'été, à Yaoundé, le Soleil a «dépassé» la verticale.

En conclusion, même dans l'hémisphère nord, le Soleil n'est pas toujours au Sud à midi vrai.

3.2.2 Matin et soir

En combinant les équations (9a) et (10), on peut obtenir l'azimut du Soleil lorsqu'il se lève et lorsqu'il se couche :

$$\cos A = -\frac{\sin \delta_s}{\cos \phi}. \quad (15)$$

Dans l'hémisphère Nord, lorsque la déclinaison est positive, A est inférieur à $-\pi/2$ au lever et supérieur à $\pi/2$ au coucher, le Soleil se lève «avant» l'Est et se couche «après» l'Ouest. Les jours d'équinoxe, il se lève exactement à l'Est et se couche exactement à l'Ouest (ce qui pouvait déjà être déduit de la figure 9). Sur la figure 10 ont été représentés les azimuts de lever du Soleil pour deux latitudes différentes dans l'hémisphère Nord. On voit que la variation de l'azimut de lever est d'autant plus forte que la latitude est élevée. Pour Paris, l'écart entre l'azimut minimal et l'azimut maximal vaut près de 70° , ce qui n'est pas négligeable ! la détermination des points cardinaux avec le lever et le coucher du Soleil doit donc se faire avec prudence.

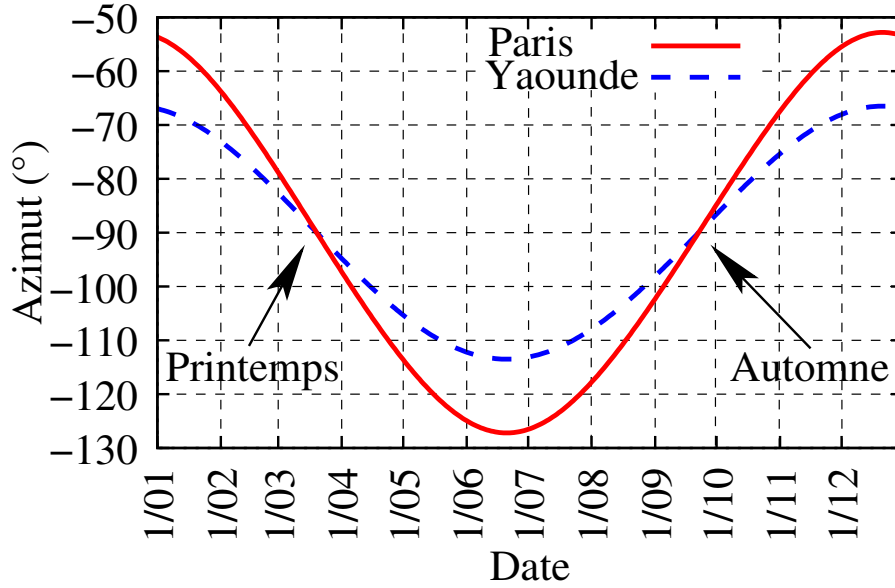


FIG. 10 – Azimuts du Soleil au lever à Yaoundé et Paris en fonction de la date. Aux équinoxes de printemps et d’automne, le Soleil se lève exactement à l’Est.

3.3 Le paradoxe de l’équinoxe

Par définition, les jours d’équinoxe, le jour et la nuit ont la même durée. Or la consultation d’un simple calendrier des postes nous indique qu’il n’en est rien, la durée du jour dépasse douze heures d’une dizaine de minutes à Paris. Pourtant avec $\delta_s = 0^\circ$ dans l’équation (13) on trouve bien $D_{\text{jour}} = 12\text{h}$. La différence provient du fait qu’imposer $h = 0^\circ$ ne signifie pas que le Soleil va apparaître ou a disparu à l’horizon, mais que le centre du Soleil se trouve à l’horizon. Or pour déterminer l’heure de lever ou de coucher du Soleil, on se réfère au sommet du disque solaire, qui peut être visible même si le centre du Soleil est sous l’horizon (du fait du diamètre angulaire du Soleil, ainsi que de la réfraction atmosphérique). Pour cette raison, la détermination des heures de lever et de coucher se fait en tenant compte d’une valeur de h valant $h_0 = -0,83^\circ$ [9]. On obtient alors une nouvelle formule pour déterminer l’angle horaire de lever ou de coucher du Soleil.

$$\cos H = \frac{\sin h_0 - \sin \phi \sin \delta_s}{\cos \phi \cos \delta_s} \approx -\tan \phi \tan \delta_s + \frac{h_0}{\cos \phi \cos \delta_s} \quad (16)$$

(h_0 est suffisamment petit pour pouvoir utiliser l’approximation $\sin h_0 = h_0$). On peut montrer que l’écart ΔH lié à h_0 vaut (d’après le calcul présenté en annexe D) :

$$\Delta H = \pm \frac{h_0}{\sqrt{\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s}}. \quad (17)$$

Pour une latitude de $48^\circ 51'$ et une déclinaison nulle, le Soleil apparaît environ cinq minutes plus tôt que ce que donne le calcul avec $h = 0^\circ$. Au total, on gagne donc dix minutes, ce qui correspond bien aux indications du calendrier.

On peut alors mettre en doute le résultat obtenu dans la partie 3.2, à savoir que les jours d’équinoxe, le Soleil se lève exactement à l’Est et se couche exactement à l’Ouest. En effet, ceci n’est vrai que pour le centre du Soleil. On peut estimer l’erreur commise sur l’azimut du Soleil au lever et au coucher en considérant désormais le sommet du Soleil. Lorsque ce dernier apparaît à l’horizon, le

centre du Soleil a pour hauteur h_0 et son azimut est décalé d'une quantité ΔA par rapport à la valeur déterminée avec l'équation (15) (voir la figure 11).

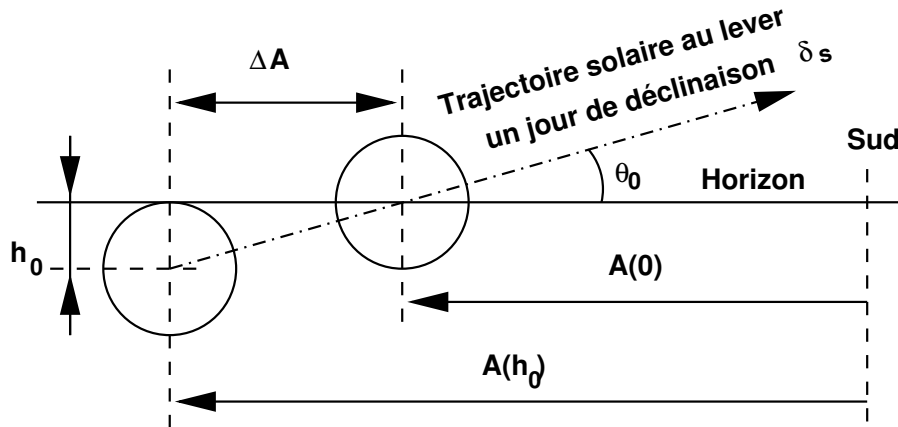


FIG. 11 – Trajectoire locale du Soleil au lever.

Par ailleurs, on peut estimer l'angle θ_0 que fait la trajectoire du Soleil avec le cercle horizon, au point d'intersection de ces deux cercles (attention à ne pas confondre θ_0 avec l'angle entre le plan de la trajectoire diurne et le plan horizon, noté γ sur la figure 12, et tel que $\gamma = \pi/2 - \phi$), θ_0 étant mesuré dans le plan tangent local vertical contenant ces deux cercles (voir l'annexe E pour la démonstration, ainsi que les figures 11 et 12 pour la signification de θ_0) :

$$\cos \theta_0 = \frac{\sin \phi}{\cos \delta_s}. \quad (18)$$

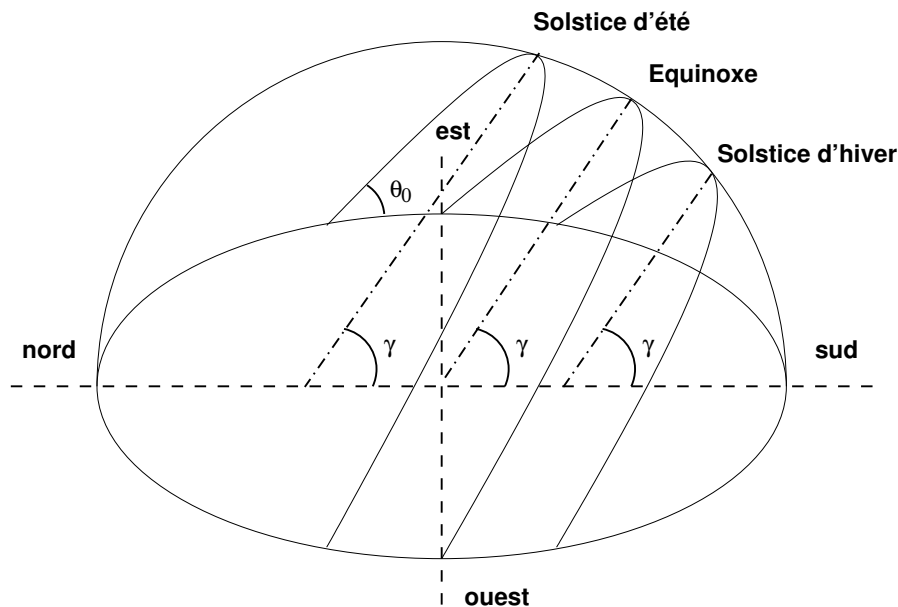


FIG. 12 – Trajectoire diurne du Soleil pour les solstices et les équinoxes dans l'hémisphère nord. θ_0 (représenté uniquement pour le solstice d'été) est l'angle que fait la trajectoire du Soleil au lever avec le cercle horizon et dépend de δ_s , alors que γ représente l'angle entre le plan de la trajectoire diurne et le plan horizon, il est indépendant de δ_s mais dépend de la latitude.

On peut remarquer qu'au niveau de l'Équateur, le Soleil se lève et se couche à la verticale (on peut le déduire également de la figure 9).

D'après la figure 11, on a également $\tan \theta_0 = h_0/\Delta A$, ce qui conduit grâce à la relation $\tan^2 x = (1 - \cos^2 x)/\cos^2 x$ à

$$\Delta A = \sqrt{\frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi}} |h_0|. \quad (19)$$

Pour des latitudes comprises entre les cercles polaires, l'argument de la racine est positif. Si maintenant on applique cette formule un jour d'équinoxe, elle se simplifie pour donner

$$\Delta A(\delta_s = 0) = |h_0| \tan \phi, \quad (20)$$

et pour des latitudes toujours comprises entre les cercles polaires (soit $|\phi| < 66^\circ 34'$), on peut vérifier que ΔA est toujours inférieure à 2° (inférieure à 1° pour Paris, inférieure à $0,1^\circ$ pour Yaoundé). En première approximation, l'erreur commise sur l'azimut est donc acceptable, et on peut toujours dire que le Soleil se lève à l'Est les jours d'équinoxe.

Remarque : le calcul précédent peut également se faire en utilisant les équations (9a) et (9c) pour une hauteur h_0 . On obtient alors

$$\cos h_0 \cos A = \sin h_0 \tan \phi - \frac{\sin \delta_s}{\cos \phi}, \quad (21)$$

soit après un développement limité en h_0 à l'ordre 1

$$\cos A = h_0 \tan \phi - \frac{\sin \delta_s}{\cos \phi}. \quad (22)$$

Sachant que $\cos A^c = -\sin \delta_s/\cos \phi$ (azimut de lever du centre du Soleil donné par l'équation (15)), on peut écrire pour l'azimut de lever du sommet du Soleil

$$A_{lever}^s = -\arccos(\cos A^c + h_0 \tan \phi), \quad (23)$$

et un calcul similaire à celui de l'annexe D permet de déterminer la quantité ΔA telle que $A_{lever}^s = A_{lever}^c + \Delta A$. On obtient bien le résultat de l'équation (20).

4 Conclusion

Au cours de cet article, nous avons montré que la trajectoire du Soleil dans le ciel n'est pas aussi régulière que ce que l'on s'imagine généralement : midi vrai n'est pas atteint tous les jours à la même heure, dans l'hémisphère Nord le Soleil n'indique pas forcément le Sud à son point le plus haut, le Soleil ne se lève à l'Est et ne se couche à l'Ouest que lors des équinoxes, pour lesquelles le jour dure plus longtemps que la nuit. Enfin, le jour le plus court, le Soleil ne se lève pas le plus tard, ni ne se couche le plus tôt.

Remerciements

Je remercie Claude Garino pour sa relecture du manuscrit, ainsi que pour les informations historiques et bibliographiques qu'il m'a fournies.

Références

- [1] Michel Capderou. *Satellites. Orbites et missions*. Springer Verlag, 2002.
- [2] M. Mueller. Equation of time - problem in astronomy. *Acta Phys. Pol. A*, 88 :S-49, 1995. <http://info.ifpan.edu.pl/firststep/aw-works/fsII/mul/mueller.html>.
- [3] <http://www.analemma.com/>.
- [4] Thierry Alhalel. La différence entre le temps solaire moyen et le temps solaire vrai : l'équation du temps. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, 95(838) :1557-1577, novembre 2001.
- [5] Thierry Alhalel. Saisons et équation du temps sur mars. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, 101(894) :1-14, mai 2007.
- [6] Irène Tiraspolsky. L'analemma du soleil photographié en 1989. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, 87(753), avril 1993. <http://udppc.asso.fr/bupdoc/textes/1993/07530535.PDF>.
- [7] <http://www.perseus.gr/>.
- [8] Alexandre Vial. Étude des lignes de déclinaison d'un cadran solaire horizontal. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, 100(881) :169-180, février 2006.
- [9] Site de l'imcce : Comprendre - concepts fondamentaux - lever et coucher d'un astre. <http://www.imcce.fr/fr/ephemerides/astronomie/Promenade/pages3/367.html>.
- [10] J. Meeus. *Astronomical Algorithms*. Willmann-Bell, 2nd edition, 1999.
- [11] J.-C. Bajard and J.-M. Muller. *Calcul et arithmétique des ordinateurs*. Hermès, 2004.
- [12] D. Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23(1) :5-48, 1991. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=103163>.

A Conversion d'une date en jour julien

Pour le jour d du mois m de l'année j , on procède comme suit [10] :

- si $m \leq 2$ alors $m = m + 12$ et $j = j - 1$
- on calcule $c = 2 - |j/100| + |j/400|$ où $|x|$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x
- on calcule $J = |1461.(j + 4716)/4| + |153.(m + 1)/5| + d + c - 1524, 5$

Cette valeur est valable à minuit. Pour une heure quelconque h de la journée, il suffit d'ajouter $h/24$ à J .

Remarque : la formule telle que donnée dans [10] n'utilise pas la forme $|153.(m + 1)/5|$, mais $|30,6001(m + 1)|$. Il ne faut pas pour autant en conclure que $153/5 = 30,6$ est une valeur approchée de la véritable valeur. Bien au contraire, la valeur 30,6001 était une astuce numérique pour éviter les erreurs de calcul dues à la représentation binaire des nombres dans les calculatrices avant l'établissement d'une norme concernant les calculs en virgule flottante (IEEE Standard 754-1985 for binary floating point arithmetic, se référer à [11, 12] pour plus de détails). Cette astuce n'est donc actuellement plus nécessaire, mais la valeur 30,6001 semble désormais faire partie du paysage des calculs astronomiques puisqu'on le retrouve dans dans nombreux articles (voir par exemple l'article «Du calendrier au Jour Julien» paru dans la revue *l'Astronomie* vol. 19, page 233, mai 2005, ou plus récemment [5]) ou codes disponibles sur Internet, sans justification, mais avec tout le sérieux qu'apportent quatre chiffres après la virgule (ce dont l'auteur ne se prive pas dans le présent article).

B Relation entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne

L'anomalie vraie ν est reliée à l'anomalie excentrique E par la relation

$$\nu = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan(E/2) \right), \quad (24)$$

avec e l'excentricité de la trajectoire. Un développement limité en e à l'ordre 3 donne

$$\nu = E + \left(e + \frac{e^3}{4}\right) \sin E + \frac{e^2}{4} \sin 2E + \frac{e^3}{12} \sin 3E. \quad (25)$$

Par ailleurs, l'anomalie excentrique E est reliée à l'anomalie moyenne M par l'équation de Kepler :

$$E = M + e \sin E. \quad (26)$$

On peut la résoudre à l'aide du théorème d'inversion de Lagrange, qui pour une variable z définie par $z = x + yf(z)$ permet d'exprimer toute fonction $G(z)$ comme une série de puissances de y :

$$G(z) = G(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} (f(x)^k G'(x)). \quad (27)$$

Dans notre cas, $z = E$, $G(z) = z$, $G'(z) = 1$, $x = M$, $y = e$ et $f(z) = \sin E$, on en déduit

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sin^2 M) + \frac{e^3}{6} \frac{\partial}{\partial x} (\sin^3 M) + \dots \quad (28)$$

soit après linéarisation

$$E = M + \left(e - \frac{1}{8}e^3\right) \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{3}{8}e^3 \sin 3M. \quad (29)$$

En combinant les équations (25) et (29), on obtient enfin une relation entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne :

$$\nu = M + \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right) \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M. \quad (30)$$

Remarque : dans le cadre d'un calcul purement numérique, l'équation (24) peut bien évidemment être utilisée directement si l'on connaît E , cependant l'équation (26) doit toujours être résolue pour trouver E . Pour ce faire, on peut utiliser un algorithme de type Newton pour chercher une racine de la fonction $f(E) = M - E + e \sin E$. L'algorithme de Newton pour la recherche d'une solution à l'équation $f(x) = 0$ s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (31)$$

par conséquent on résout l'équation (26) par itération à l'aide de la formule

$$E_{n+1} = \frac{M - e(E_n \cos E_n - \sin E_n)}{1 - e \cos E_n}, \quad (32)$$

qui en partant de $E_0 = M$ converge rapidement.

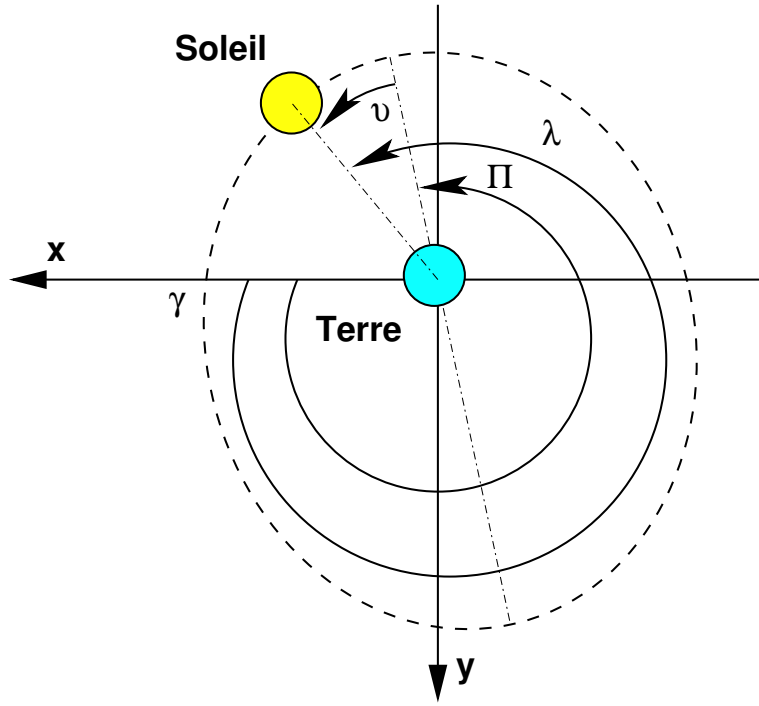


FIG. 13 – Trajectoire et angles de repérage du Soleil dans le plan de l'écliptique.

C Calcul de l'influence de l'obliquité (réduction à l'équateur)

L'inclinaison de l'axe de la Terre (obliquité) est $\epsilon = 23^{\circ}26' = 23,43^{\circ}$. La longitude écliptique du Soleil au périhélie par rapport au point vernal (noté γ) est $\Pi = 282,9372^{\circ}$ (figure 13). La longitude écliptique du Soleil (plan de l'écliptique : plan de rotation du soleil) est donnée par :

$$\lambda = \nu + \Pi = M + \Pi + C = 280,47^{\circ} + M_1(J - J_{2000}) + C. \quad (33)$$

Dans le système de coordonnées écliptiques, le Soleil a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_p = \cos \lambda_s \\ y_p = \sin \lambda_s \\ z_p = 0 \end{cases} \quad (34)$$

On veut maintenant exprimer les coordonnées du Soleil dans le système de coordonnées équatoriales. Ces coordonnées sont nommées ascension droite (α) et déclinaison (δ). Dans ce système, le Soleil a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_e = \cos \alpha \cos \delta \\ y_e = \sin \alpha \cos \delta \\ z_e = \sin \delta \end{cases} \quad (35)$$

et à l'aide d'une matrice de rotation (rotation d'un angle $-\epsilon$ autour de \vec{x}), on obtient sans trop de difficulté à partir de l'équation (34)

$$\begin{cases} x_e = \cos \lambda_s \\ y_e = \sin \lambda_s \cos \epsilon \\ z_e = \sin \lambda_s \sin \epsilon \end{cases} \quad (36)$$

soit finalement en rassemblant les équations (35) et (36)

$$\begin{cases} \cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda_s \\ \sin \alpha \cos \delta = \sin \lambda_s \cos \epsilon \\ \sin \delta = \sin \lambda_s \sin \epsilon \end{cases} \quad (37)$$

et donc

$$\alpha_s = \arctan(\tan \lambda_s \cos \epsilon), \quad (38)$$

$$\delta_s = \arcsin(\sin \lambda_s \sin \epsilon). \quad (39)$$

On peut utiliser directement ces deux formules (en faisant attention à l'utilisation de la fonction arctan [4]), ou utiliser un développement limité en ϵ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \lambda_s - \frac{1}{4} \sin(2\lambda_s) \epsilon^2 + \frac{1}{96} (-4 \sin(2\lambda_s) + 3 \sin(4\lambda_s)) \epsilon^4 \\ &\quad + \frac{1}{2880} (-17 \sin(2\lambda_s) + 30 \sin(4\lambda_s) - 15 \sin(6\lambda_s)) \epsilon^6, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \delta_s &= \sin \lambda_s \epsilon + \frac{1}{6} (-\sin \lambda_s + \sin^3 \lambda_s) \epsilon^3 + \left(\frac{1}{120} \sin \lambda_s - \frac{1}{12} \sin^3 \lambda_s + \frac{3}{40} \sin^5 \lambda_s \right) \epsilon^5 \\ &= \left(\epsilon - \frac{1}{6} \epsilon^3 + \frac{1}{120} \epsilon^5 \right) \sin \lambda_s + \left(\frac{1}{6} \epsilon^3 - \frac{1}{12} \epsilon^5 \right) \sin^3 \lambda_s + \frac{3}{40} \epsilon^5 \sin^5 \lambda_s. \end{aligned} \quad (41)$$

On peut vérifier que $-\epsilon < \delta_s < \epsilon$.

On appelle R la différence entre α_s et λ_s :

$$\begin{aligned} R &= \alpha_s - \lambda_s \\ &= \left(-\frac{1}{4} \epsilon^2 - \frac{1}{24} \epsilon^4 - \frac{17}{2880} \epsilon^6 \right) \sin(2\lambda_s) + \left(\frac{1}{32} \epsilon^4 + \frac{1}{96} \epsilon^6 \right) \sin(4\lambda_s) - \frac{1}{192} \epsilon^6 \sin(6\lambda_s). \end{aligned} \quad (42)$$

Après calcul on obtient

$$R = -2,4680^\circ \sin(2\lambda_s) + 0,0530^\circ \sin(4\lambda_s) - 0,0014^\circ \sin(6\lambda_s), \quad (43)$$

et

$$\delta_s = 22,801^\circ \sin \lambda_s + 0,5999^\circ \sin^3 \lambda_s + 0,0493^\circ \sin^5 \lambda_s. \quad (44)$$

On trouve dans la littérature une autre expression pour R (par exemple [4], avec une démonstration différente).

Soit $y = \arctan\left(\frac{\tan x}{\cos \theta}\right)$. Dans [2], il est montré que

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 x} \quad (45)$$

peut s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier :

$$f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tan^{2n} \frac{\theta}{2} \cos 2nx. \quad (46)$$

Par intégration, on peut alors exprimer y sous forme d'une somme.

Considérons à présent la fonction $y = \arctan(\tan x \cdot \cos \theta)$. Sa dérivée vaut

$$g(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 x}. \quad (47)$$

On a donc $g(x) = f(x - \pi/2)$. Par conséquent, on peut écrire

$$g(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tan^{2n} \frac{\theta}{2} \cos 2n(x - \pi/2), \quad (48)$$

soit encore, sachant que $\cos n\pi = (-1)^n$ (n entier) :

$$g(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan^{2n} \frac{\theta}{2} \cos 2nx. \quad (49)$$

Par intégration et remplacement des variables par les quantités pertinentes pour le problème (équation (38)), on obtient donc finalement

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \tan^{2n} \frac{\epsilon}{2} \sin 2n\lambda_s. \quad (50)$$

Généralement, la formule présentée ne retient que trois termes :

$$R = -\tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2\lambda_s + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \sin 4\lambda_s - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \sin 6\lambda_s + \dots \quad (51)$$

On peut remarquer que l'équation (42) correspond au développement limité à l'ordre 6 de l'équation (51). L'application numérique donne un résultat identique.

D Correction de l'angle horaire de lever du Soleil

On a d'après les équations (10) et (16)

$$\cos H^c = -\tan \phi \tan \delta_s, \quad (52)$$

$$\cos H^s = -\tan \phi \tan \delta_s + \frac{h_0}{\cos \phi \cos \delta_s}, \quad (53)$$

avec H^c et H^s les angles horaires de lever ou de coucher du Soleil calculés pour le centre et le sommet du Soleil respectivement. On notera $H_{coucher}^c$ et $H_{coucher}^s$ les solutions positives des équations (52) et (53), $H_{lever}^c = -H_{coucher}^c$ et $H_{lever}^s = -H_{coucher}^s$ les solutions négatives. On cherche à déterminer la quantité ΔH telle que $H_{lever}^s = H_{lever}^c + \Delta H$. Pour cela, on utilise le développement en série de Taylor au premier ordre de la fonction \arccos :

$$\begin{aligned} H_{lever}^s &= -\arccos \left(\cos H^c + \frac{h_0}{\cos \phi \cos \delta_s} \right) = -\arccos(\cos H^c) - \frac{h_0}{\cos \phi \cos \delta_s} [\arccos(\cos H^c)]' \\ &= H_{lever}^c - \frac{h_0}{\cos \phi \cos \delta_s} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 H^c}} \\ &= H_{lever}^c - \frac{h_0}{\cos \phi \cos \delta_s} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \tan^2 \phi \tan^2 \delta_s}} \\ &= H_{lever}^c + \frac{h_0}{\sqrt{\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s}}. \end{aligned} \quad (54)$$

On obtient donc la quantité ΔH recherchée :

$$\Delta H = \frac{h_0}{\sqrt{\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s}}. \quad (55)$$

Pour l'heure de coucher, on obtient une valeur ΔH de signe opposé.

E Angle au lever

D'après les équations (9a) à (9c), la position du Soleil peut être repérée par le vecteur

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \delta_s \cos H - \cos \phi \sin \delta_s \\ \cos \delta_s \sin H \\ \cos \phi \cos \delta_s \cos H + \sin \phi \sin \delta_s \end{pmatrix}, \quad (56)$$

d'où

$$\vec{d} = \frac{d\vec{s}}{dH} = \cos \delta_s \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin H \\ \cos H \\ -\cos \phi \sin H \end{pmatrix}. \quad (57)$$

donc $d_{\parallel} = \sqrt{\sin^2 \phi \sin^2 H + \cos^2 H}$ et $d_{\perp} = \sqrt{\cos^2 \phi (1 - \cos^2 H)}$.

Comme au lever $\cos H = -\tan \phi \tan \delta_s$, on en déduit

$$\cos \theta_0 = \sqrt{\frac{d_{\parallel}^2}{d_{\parallel}^2 + d_{\perp}^2}} = \frac{\sin \phi}{\cos \delta_s}. \quad (58)$$